

TD₅ – Matrices**Exercice 1** ★

Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé. Quand l'endomorphisme est inversible on déterminera également son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ★

- Déterminer selon les valeurs des réels a et b le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.
- Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à M . Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 ★★

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3$.
- En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible.

Exercice 4 ★

Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Matrice d'une projection ★★

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((-1, 1, 1))$.

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F et en déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
- On note p la projection sur F parallèlement à G .
 - Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
 - En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
 - Soit q la projection sur G parallèlement à F . Montrer que $q = \text{id}_E - p$ et en déduire la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 6 ★★

On pose

$$A = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A .

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est diagonale
3. Déterminer une telle base et la matrice de f dans ladite base.

Exercice 7 Formule de changement de base ★

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire la valeur de A^4 .

Exercice 8 ★★

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 9 ★★

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathcal{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice φ^n dans la base canonique.

Exercice 10 ★★

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins de ces deux matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 11 ★★★

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A .

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D .
2. Déterminer une matrice P de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
3. Calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 ★★★

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

Exercice 13 ★★★

Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 ★★

Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer le noyau et le rang de φ . Est-il bijectif?
3. Vérifier que $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0$, en déduire l'expression de φ^{-1} .

Exercice 15 ★★

Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et montrer que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle, alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(A)$.

Exercice 16 ★★★

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\text{Rang}(M) = \text{Tr}(M) = 1$.

1. Montrer que M est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M . Montrer que f est un projecteur.

Exercice 17 ★★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M + M^\top = \text{Tr}(M)A$.
On pourra distinguer les cas $\text{Tr}(A) = 2$ et $\text{Tr}(A) \neq 2$.

Exercice 18 Matrices à diagonale strictement dominante ★★★★★

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$

tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Exercice 19 ★★★★★

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.
2. En déduire que $A = 0_n$ si et seulement si $\text{Tr}(A^\top A) = 0$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit une application φ_A sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi : M \mapsto \text{Tr}(A^\top M)A$.
 - (a) Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Prouver que $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
 - (c) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 20 ★★

(Oral 2008)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B = AB$

1. Montrer que $B - I_n$ est inversible
2. Montrer que A et B commutent.

Exercice 21 ★★

(Oral 2015)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $X \mapsto \text{Tr}(X)A + X$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que φ est bijectif lorsque $\text{Tr}(A) \neq -1$
3. Donner le rang de φ lorsque $\text{Tr}(A) = -1$
4. Retrouver directement le résultat de la question 2. lorsque $n = 2$.

Exercice 22 ★★

(Oral 2011)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $f : x \mapsto x^2 e^{2x}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$. Déterminer P_n à l'aide du calcul de A^n .

Exercice 23 ★★

(Oral 2018, 2019)

On pose $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_3 + bJ, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Calculer J^2 et J^n , J est-elle inversible ?
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. En donner une base et la dimension. E est-il stable par produit ?
3. Trouver les matrices de E qui admettent un inverse dans E et préciser celui-ci.
4. Résoudre $X^2 = X$ dans E .

Exercice 24 ★★

(Oral 2018)

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

1. Donner le rang de C
2. Trouver les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BC = 0_3$